

Critères de divisibilité

Prérequis :

- › Multiplication et division
- › Tables de multiplication

1. Division euclidienne

Division euclidienne

Dans une division euclidienne, on a toujours : a et b sont des nombres entiers positifs, avec b non nul. Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver deux nombres entiers positifs q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } r < b.$$

$$\text{dividende} = (\text{diviseur} \times \text{quotient}) + \text{reste}$$

avec $\text{reste} < \text{diviseur}$.

dividende	8	9	3	1	3	diviseur
		7	8	6	8	quotient
		1	1	3		
		-	1	0	4	
reste	0	0	9			

$$\text{Vérification : } 893 = (13 \times 68) + 9 \text{ avec } 9 < 13$$

Exemple 1.1

Pose la division de 893 par 13.

$$893 = (13 \times 68) + 9$$

avec $9 < 13$

2. Diviseurs et multiples

Diviseur et multiple

Si $a = b \times q$ (c'est-à-dire si le reste de la division euclidienne de a par b est nul), alors :

- b est un **diviseur** de a
- a est un **multiple** de b

Exemple 2.1

$63 = 7 \times 9$, donc :

- 7 est un diviseur de 63.
7 divise 63.
- 63 est un multiple de 7.
63 est divisible par 7.

Nombre premier

Un nombre premier est un nombre entier positif qui possède exactement deux diviseurs distincts : lui-même et 1.

Remarque

Tout nombre entier positif possède **au moins deux diviseurs**.

Exemple 2.2

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Le nombre 4 **n'est pas** premier car il a 3 diviseurs : 1, 2 et 4.

Critères de divisibilité

- Si un nombre a se **termine** par **0, 2, 4, 6** ou **8**, alors a est divisible par **2**.
- Si la **somme des chiffres du nombre** a est divisible par **3**, alors a est divisible par **3**.
- Si le **nombre formé par les deux derniers chiffres** d'un nombre a est divisible par **4**, alors a est divisible par **4**.
- Si un nombre a se **termine** par **0** ou **5**, alors a est divisible par **5**.
- Si un nombre a est **divisible** par **2** et par **3**, alors a est divisible par **6**.
- Si la **somme des chiffres** du nombre a est divisible par **9**, alors a est divisible par **9** et **3**.
- Si un nombre a se **termine** par **0**, alors a est divisible par **10**.

3. Trouver tous les diviseurs d'un nombre

★ Méthode : Décomposer en facteurs premiers

Étape 1. Diviser le nombre par le plus petit nombre premier possible (2, 3, 5, 7, ...)

Étape 2. Continuer avec le quotient obtenu

Étape 3. Répéter jusqu'à obtenir 1

Étape 4. Écrire le nombre comme produit de facteurs premiers

Q Exemple 3.1

Décomposition de 270 en facteurs premiers :

270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

Donc : $270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5$

Étape 1. Diviser par le plus petit nombre premier.

270 est pair, donc divisible par 2 : $270 \div 2 = 135$

Étape 2. Continuer avec le quotient.

135 n'est pas pair, mais la somme des chiffres est $1 + 3 + 5 = 9$, donc divisible par 3 : $135 \div 3 = 45$

Étape 3. Répéter jusqu'à obtenir 1.

$45 \div 3 = 15$, puis $15 \div 3 = 5$, puis $5 \div 5 = 1$

Étape 4. Écrire le produit de facteurs premiers.

$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5$

★ Méthode : Trouver tous les diviseurs

Étape 1. Décomposer le nombre en produit de facteurs premiers

Étape 2. Multiplier chaque combinaison unique de ces facteurs premiers ensemble

Étape 3. Lister tous les résultats obtenus

Étape 4. Ajouter 1 (toujours diviseur)

Q Exemple 3.2

Trouve tous les diviseurs de 270 :

Décomposition : $270 = 2 \times 3^3 \times 5$

Étape 1. Décomposer en facteurs premiers.

$270 = 2 \times 3^3 \times 5$ (déjà fait ci-dessus)

Étape 2. Multiplier chaque combinaison unique.

— Facteurs simples : 2, 3, 5

— Combinaisons de 2 : $2 \times 3 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 5 = 15$, $2 \times 5 = 10$

- Combinaisons de 3 : $2 \times 3 \times 3 = 18$, $3 \times 3 \times 3 = 27$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $3 \times 3 \times 5 = 45$
- Combinaisons de 4 : $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$, $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$, $3 \times 3 \times 3 \times 5 = 135$
- Nombre complet : $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 270$

Étape 3. Lister tous les résultats.

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135, 270

Étape 4. Ajouter 1 (toujours diviseur).

Déjà inclus dans la liste.

Diviseurs de 270 : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135 et 270.

Q Exemple 3.3

Trouve tous les diviseurs de 180 :

Décomposition : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Diviseurs de 180 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180.

4. Plus grand diviseur commun (PGCD)

★ Méthode : Calculer le PGCD de deux nombres

Étape 1. Décomposer les deux nombres en produits de facteurs premiers

Étape 2. Identifier les facteurs premiers **communs** aux deux décompositions

Étape 3. Multiplier ces facteurs communs

Étape 4. Le résultat est le PGCD

Q Exemple 4.1

Trouve le PGCD de 270 et 180 :

Étape 1. Décomposer les deux nombres en facteurs premiers.

$$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

Étape 2. Identifier les facteurs communs.

Les facteurs communs sont : 2, 3, 3, et 5

— 270 a : un 2, trois 3, un 5

— 180 a : deux 2, deux 3, un 5

— Communs : un 2, deux 3, un 5

Étape 3. Multiplier les facteurs communs.

$$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$$

Étape 4. Conclure.

Le plus grand diviseur commun à 270 et 180 est 90.

$$\text{PGCD}(270; 180) = 90$$

⚠ Piège à éviter !

- Ne pas oublier d'identifier **d'abord** le plus petit nombre premier pour la décomposition !
- Un nombre premier a **exactement 2 diviseurs**, pas plus !
- Pour le PGCD, ne prendre que les facteurs **communs** aux deux nombres.

✓ Je retiens

Je connais...	J'en déduis...	J'utilise...
$a = b \times q + r$ avec $r < b$	Division euclidienne de a par b	La formule de la division euclidienne
$a = b \times q$ (reste nul)	b divise a et a est multiple de b	La définition de diviseur/multiple
Décomposition en facteurs premiers	Tous les diviseurs du nombre	Multiplication des combinaisons
Facteurs communs à deux nombres	Le PGCD des deux nombres	Multiplication des facteurs communs

📺 Vidéo(s) pédagogique(s) :

Division euclidienne	Diviseurs et multiples	Facteurs premiers	PGCD
			